

TEMA 3: FORMAS MULTILINEALES Y BILINEALES

1. APLICACIONES BILINEALES

Las aplicaciones bilineales son aquellas en las que se combinan tres espacios vectoriales; dos como producto y uno en la imagen de la aplicación.

Sean los espacios vectoriales V_1 , V_2 y V_3 sobre el cuerpo de los reales K .

Sea además la función $f: V_1 \times V_2 \rightarrow V_3$ una aplicación lineal tal que:

$$\begin{aligned}\vec{x}_1 &\in V_1 \\ \vec{x}_2 &\in V_2 \\ f(\vec{x}_1, \vec{x}_2) &\in V_3\end{aligned}$$

$$f \text{ es aplicación bilineal} \Leftrightarrow \begin{aligned}f(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}, \vec{u}) &= \lambda f(\vec{x}, \vec{u}) + \mu f(\vec{y}, \vec{u}) \\ f(\vec{v}, \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}) &= \lambda f(\vec{v}, \vec{a}) + \mu f(\vec{v}, \vec{b})\end{aligned}$$

$$\forall \lambda, \mu \in K \quad \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{v} \in V_1 \quad \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{u} \in V_2$$

• *Ejemplo:*

$$\begin{aligned}f: R^3 \times R^2 &\rightarrow R^2 \\ \vec{x} \in R^3 \quad \vec{x} &= (x_1, x_2, x_3) \\ \vec{y} \in R^2 \quad \vec{y} &= (y_1, y_2)\end{aligned}$$

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1 + y_1, x_3 - y_2)$$

Ejercicio: Comprobar que la función anterior es una aplicación bilineal.

Sea V un espacio vectorial sobre K . Llamamos **forma bilineal** a cualquier aplicación bilineal del tipo: $f: V \times V \rightarrow K$.

Por lo tanto, sean dos vectores $\vec{x}, \vec{y} \in V$, su imagen $f(\vec{x}, \vec{y}) \in K$.

• *Ejemplo:*

$$\begin{aligned}f: R^2 \times R^2 &\rightarrow R \\ \vec{x} &= (x_1, x_2) \\ \vec{y} &= (y_1, y_2)\end{aligned}$$

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_1 + x_2y_2$$

Las formas lineales también pueden relacionarse con las matrices:

$$f: V \times V \rightarrow K$$

$B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ es base de V

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f(\vec{e}_1, \vec{e}_1) & \dots & f(\vec{e}_1, \vec{e}_n) \\ \dots & & \dots \\ f(\vec{e}_n, \vec{e}_1) & \dots & f(\vec{e}_n, \vec{e}_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio: Escribir la matriz respecto de la base canónica.

Con respecto a la matriz X , se utiliza su traspuesta.

El resultado puede expresarse como:

$$\boxed{f(\vec{x}, \vec{y}) = X^t \cdot A \cdot Y}$$

Con lo que la matriz asociada es:

$$A = M(f, B)$$

Esto es cierto, pues la imagen $f(\vec{x}, \vec{y})$ es un escalar, al igual que el otro término: la matriz A es cuadrada, que multiplicada por la matriz columna Y da lugar a otra matriz columna, la que a su vez multiplicada por la matriz fila X^t , origina un escalar.

Considerando otra base $B' = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$.

Los vectores \vec{x} e \vec{y} tendrán una representación diferente (X' e Y' , respectivamente), junto con otra matriz asociada: $A' = M(f, B')$.

La matriz de cambio de base P se puede encontrar igualando los escalares de la imagen:

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow X^t \cdot A \cdot Y = X'^t \cdot A' \cdot Y'$$

Como $X = P \cdot X'$ e $Y = P \cdot Y'$:

$$(P \cdot X')^t \cdot A \cdot P \cdot Y'$$

La traspuesta de un producto es el producto de las traspuestas, pero cambiado de orden:

$$X'' \cdot P^t \cdot A \cdot P \cdot Y' = X'' \cdot A' \cdot Y'$$

Resultando:

$$\boxed{P^t \cdot A \cdot P = A'}$$

- Se dice que una forma bilineal es **simétrica** si al cambiar el orden de los argumentos el resultado no cambia.

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{y}, \vec{x})$$

- Se dice que una forma bilineal es **definida positiva** si:

$$f(\vec{x}, \vec{x}) > 0 \quad \forall \vec{x} \in V / \vec{x} \neq \vec{0}$$

Ejercicio: Demstrar: $f(\vec{0}, \vec{0}) = 0$, $f(\vec{0}, \vec{x}) = 0$ y $f(\vec{x}, \vec{0}) = 0$.

2. PRODUCTO ESCALAR

El producto escalar es un caso particular de las formas multilineales.

Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo de los reales o complejos K , llamamos **producto escalar** a cualquier forma bilineal **simétrica** y **definida positiva**.

Se utiliza la siguiente notación:

$$\bullet: V \times V \rightarrow K$$

Las condiciones son:

- a) Que sea *forma bilineal*

$$(\lambda \vec{x}_1 + \mu \vec{x}_2) \cdot \vec{y} = \lambda(\vec{x}_1 \cdot \vec{y}) + \mu(\vec{x}_2 \cdot \vec{y})$$

$$\vec{x} \cdot (\lambda \vec{y}_1 + \mu \vec{y}_2) = \lambda(\vec{x} \cdot \vec{y}_1) + \mu(\vec{x} \cdot \vec{y}_2)$$

(no es necesario demostrar la segunda igualdad si se ha demostrado que es simétrica)

- b) Que sea *simétrica*

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$$

- c) Que sea *definida positiva*

$$\vec{x} \cdot \vec{x} = 0 \quad \forall \vec{x} \in V / \vec{x} \neq 0$$

- *Ejemplo:*

En R^2 sobre R , se definen algunos productos escalares como:

$$\bullet: R^2 \times R^2 \rightarrow R$$

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2$$

$$\bullet_1: R^2 \times R^2 \rightarrow R$$

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 3x_1 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1 + 5x_2 \cdot y_2$$

Cuando en un espacio vectorial se fija un producto escalar, se dice que es un **espacio euclídeo**, y se representa por (V, \bullet) .

En un espacio euclídeo se puede hablar de la **norma de un vector**:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$$

Algunas propiedades de la norma son:

$$\bullet \quad \|\vec{x}\| \geq 0 \quad \forall \vec{x} \in V$$

$$\bullet \quad \|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$$

(estas dos son consecuencia de estar definido positivo)

$$\bullet \quad \|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$

$$\bullet \quad \|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|$$

Un vector es **unitario** si su norma es la unidad: $\|\vec{x}\| = 1$.

A partir de un vector \vec{x} se puede encontrar su unitario \vec{x}^0 . Este vector será el resultado de multiplicar al original por un escalar:

$$\vec{x}^0 = \lambda \cdot \vec{x}$$

La norma del vector \vec{x} pertenece a K , al igual que su inversa, luego:

$$\|\vec{x}\| \in K \quad \frac{1}{\|\vec{x}\|} \in K$$

$$\vec{x} \cdot \frac{1}{\|\vec{x}\|} = \vec{x}^0$$

Puesto que:

$$\|\vec{x}^0\| = \left\| \frac{1}{\|\vec{x}\|} \cdot \vec{x} \right\| = 1$$

Dos vectores son **ortogonales** si su producto escalar es 0. Gráficamente, se trata de vectores perpendiculares.



Sea un espacio vectorial V , un subespacio del mismo S y una base B . Es interesante que los vectores de la misma sean ortogonales. Para ello, se calculará una nueva base B' . Una forma de hacerlo es seguir el **algoritmo de Gram-Smith**.

Sea $B = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ una base.

Su base equivalente ortogonal será $B' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$.

La relación necesaria para que sean ortogonales es la siguiente:

- $\vec{u}_1 = \vec{x}_1$
- $\vec{u}_2 = \vec{x}_2 - \frac{\vec{x}_2 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1$

\vec{u}_1 y \vec{u}_2 son ortogonales, pues $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$

$$\vec{u}_1 \cdot \left(\vec{x}_2 - \frac{\vec{x}_2 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 \right) = \vec{x}_2 \cdot \vec{u}_1 - \frac{\vec{x}_2 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 = \vec{x}_2 \cdot \vec{u}_1 - \vec{x}_2 \cdot \vec{u}_1 = 0$$

- $\vec{u}_3 = \vec{x}_3 - \frac{\vec{x}_3 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 - \frac{\vec{x}_3 \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \vec{u}_2$
- ...
- $\vec{u}_n = \vec{x}_n - \frac{\vec{x}_n \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 - \dots - \frac{\vec{x}_n \cdot \vec{u}_{n-1}}{\vec{u}_{n-1} \cdot \vec{u}_{n-1}} \vec{u}_{n-1}$

Expresado en forma de matrices:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 & \dots & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_n \\ \dots & & \dots \\ \vec{e}_n \cdot \vec{e}_1 & \dots & \vec{e}_n \cdot \vec{e}_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Como la base es ortogonal, la matriz asociada estará formada únicamente por una diagonal principal (el resto serán ceros).

Decimos que un conjunto de vectores es **ortonormal** cuando es ortogonal y todos los vectores son unitarios.

Expresado en forma de matrices:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 & \dots & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_n \\ \dots & & \dots \\ \vec{e}_n \cdot \vec{e}_1 & \dots & \vec{e}_n \cdot \vec{e}_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n$$

Ejercicio: En R^2 , sea la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, tal que $\vec{e}_1 = (1,0)$ y $\vec{e}_2 = (1,1)$. Los vectores \vec{x} e \vec{y} son (x_1, x_2) y (y_1, y_2) respecto de B . El producto escalar se define como $\vec{x} \cdot \vec{y} = 3x_1 \cdot y_1 + 2x_1 \cdot y_2 + 2x_2 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2$.

Buscar una base B' donde la matriz asociada al producto escalar sea la matriz identidad.

3. FORMAS MULTILINEALES

Generalizando ahora todo lo anterior, se tiene una función f tal que:

$$f: V \times V \times \dots \times V \rightarrow K$$

f es forma multilineal

$$\Leftrightarrow f(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{i-1}, \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_n) = \lambda f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{u}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_n) + \mu f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{v}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_n)$$

$$\forall \lambda, \mu \in K \quad \forall \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{u}, \vec{v} \in V \quad 1 \leq i \leq n$$

Se dice que una forma multilineal es **simétrica** si al cambiar el orden entre dos de sus argumentos la función no cambia.

$$f(\vec{x}_1, \dots, \vec{u}, \dots, \vec{v}, \dots, \vec{x}_n) = f(\vec{x}_1, \dots, \vec{v}, \dots, \vec{u}, \dots, \vec{x}_n)$$

Se dice que una forma multilineal es **antisimétrica** si al cambiar el orden entre dos de sus argumentos, la función cambia de signo.

$$f(\vec{x}_1, \dots, \vec{u}, \dots, \vec{v}, \dots, \vec{x}_n) = -f(\vec{x}_1, \dots, \vec{v}, \dots, \vec{u}, \dots, \vec{x}_n)$$

Se dice que una forma multilineal es **alternada** si cuando dos argumentos coinciden la imagen es cero.

$$f(\vec{x}_1, \dots, \vec{u}, \dots, \vec{u}, \dots, \vec{x}_n) = 0$$

Una forma es alternada \Leftrightarrow es antisimétrica

Demostración:

- Demostración de \Rightarrow

Como es alternada:

$$f(\vec{x}_1, \dots, \vec{u} + \vec{v}, \dots, \vec{u} + \vec{v}, \dots, \vec{x}_n) = 0$$

Como es una forma multilineal:

$$\begin{aligned} 0 &= f(\vec{x}_1, \dots, \vec{u}, \dots, \vec{u} + \vec{v}, \dots, \vec{x}_n) + f(\vec{x}_1, \dots, \vec{v}, \dots, \vec{u} + \vec{v}, \dots, \vec{x}_n) \\ 0 &= f(\vec{x}_1, \dots, \vec{u}, \dots, \vec{u}, \dots, \vec{x}_n) + f(\vec{x}_1, \dots, \vec{u}, \dots, \vec{v}, \dots, \vec{x}_n) + f(\vec{x}_1, \dots, \vec{v}, \dots, \vec{u}, \dots, \vec{x}_n) + f(\vec{x}_1, \dots, \vec{v}, \dots, \vec{v}, \dots, \vec{x}_n) \\ &\quad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ &\quad 0 \qquad \qquad \qquad 0 \\ 0 &= f(\vec{x}_1, \dots, \vec{u}, \dots, \vec{v}, \dots, \vec{x}_n) + f(\vec{x}_1, \dots, \vec{v}, \dots, \vec{u}, \dots, \vec{x}_n) \\ &\quad f(\vec{x}_1, \dots, \vec{u}, \dots, \vec{v}, \dots, \vec{x}_n) = -f(\vec{x}_1, \dots, \vec{v}, \dots, \vec{u}, \dots, \vec{x}_n) \end{aligned}$$

Luego es alternada.

Ejercicio: Demostrar la implicación en el otro sentido \Leftarrow

4. DETERMINANTES

El determinante es una particularidad de la forma multilineal.

Sea el espacio vectorial V sobre el cuerpo K .

Sea $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ una base de V .

El determinante es la única forma multilineal alterada que cumple lo siguiente:

$$\det: V \times \dots \times V \rightarrow K$$

$$\boxed{\det(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = 1}$$

- *Ejemplo:*

Considerando R^2 sobre K .

Sea $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ una base de R^2 tal que $\vec{e}_1 = (1,0)$ y $\vec{e}_2 = (-1,1)$.

$\det: R^2 \times R^2 \rightarrow R$, donde $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 1$

Considerando dos vectores:

$$\vec{x} = x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2$$

$$\vec{y} = y_1 \cdot \vec{e}_1 + y_2 \cdot \vec{e}_2$$

$$\begin{aligned} \det(\vec{x}, \vec{y}) &= \det(x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2, y_1 \cdot \vec{e}_1 + y_2 \cdot \vec{e}_2) = \\ &= x_1 \cdot \det(\vec{e}_1, y_1 \cdot \vec{e}_1 + y_2 \cdot \vec{e}_2) + x_2 \cdot \det(\vec{e}_2, y_1 \cdot \vec{e}_1 + y_2 \cdot \vec{e}_2) = \\ &= x_1 \cdot [y_1 \cdot \det(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + y_2 \cdot \det(\vec{e}_1, \vec{e}_2)] + x_2 [y_1 \cdot \det(\vec{e}_2, \vec{e}_1) + y_2 \cdot \det(\vec{e}_2, \vec{e}_2)] \end{aligned}$$

En esta expresión:

$$\begin{aligned} \det(\vec{e}_1, \vec{e}_1) &= 0 \text{ (por ser alternada)} \\ \det(\vec{e}_1, \vec{e}_2) &= 1 \text{ (por ser los vectores de la base)} \\ \det(\vec{e}_2, \vec{e}_1) &= -1 \text{ (por ser antisimétrica)} \\ \det(\vec{e}_2, \vec{e}_2) &= 0 \text{ (por ser alternada)} \end{aligned}$$

Quedando que:

$$\det(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1$$

En el caso de que se trate de más vectores, los diferentes resultados tendrán un signo que dependerá del orden de los subíndices.

$$\det(\vec{e}_{i_1}, \vec{e}_{i_2}, \dots, \vec{e}_{i_n}) = (-1)^x$$

Para su estudio se utilizan permutaciones. Los subíndices van desde el 1 hasta el propio n .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

Una de las permutaciones posibles es la identidad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Se llama **inversión** de una permutación a la operación de intercambiar dos elementos de la fila inferior.

Se llama **signo** de una permutación a $(-1)^x$, donde x es el número de inversiones que se necesitan realizar para transformar la identidad en la permutación dada.

- *Ejemplo:*

Calcular el signo de la permutación

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

3 inversiones, luego el signo es negativo: $(-1)^3$

- *Ejemplo:*

En R^3 , se escriben los vectores:

$$\vec{x} = x_{11}\vec{e}_1 + x_{21}\vec{e}_2 + x_{31}\vec{e}_3$$

$$\vec{y} = x_{12}\vec{e}_1 + x_{22}\vec{e}_2 + x_{32}\vec{e}_3$$

$$\vec{z} = x_{13}\vec{e}_1 + x_{23}\vec{e}_2 + x_{33}\vec{e}_3$$

Para calcular el determinante resultante, se van escribiendo todas las permutaciones posibles, para así poder conocer el signo de cada combinación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \text{etc...}$$

$$\det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = x_{11}x_{22}x_{33}\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) + x_{12}x_{21}x_{33}\det(\vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3) + \dots$$

$$\det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = x_{11}x_{22}x_{33} - x_{12}x_{21}x_{33} \dots$$

El resultado sería:

$$\det \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix} \right\} = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix}$$

$$\det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = x_{11}x_{22}x_{33} + x_{12}x_{23}x_{31} + x_{13}x_{21}x_{32} - x_{11}x_{23}x_{32} - x_{12}x_{21}x_{33} - x_{13}x_{22}x_{31}$$

Ejercicio: Comparar lo dicho hasta ahora sobre las formas multilineales con todo lo conocido de años anteriores sobre determinantes.

En el caso de un determinante de orden tres, la notación antes vista es la misma que considerar el determinante de los tres vectores (por lo general, columnas), quedando la siguiente expresión:

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} = \det((x_{11}, x_{21}, x_{31}), (x_{12}, x_{22}, x_{32}), (x_{13}, x_{23}, x_{33})) = \sum (-1)^s x_{1i_1} \cdot x_{2i_2} \cdot x_{3i_3}$$

Donde se usan las permutaciones según:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix}$$

Propiedades de los determinantes

- El determinante de una **matriz diagonal** o de una **matriz triangular** es el producto de los elementos de la diagonal.

Ejemplos:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 4 \qquad \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3$$

matriz triangular

matriz diagonal

Es decir, el determinante de una matriz que cumpla lo anterior es cero para todas las permutaciones salvo para la permutación identidad:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

- El determinante de una matriz y el de su **traspuesta** coinciden:

$$\boxed{|A| = |A^t|}$$

Por lo tanto, todo lo que se defina para las columnas será aplicable también para las filas, y viceversa. Por eso, no importa colocar los vectores en filas o en columnas.

Se hablará entonces de líneas, refiriéndose indistintamente a filas o columnas.

- Al **intercambiar** dos líneas de una matriz, el determinante cambia de signo.
Esto es debido a que el determinante se ha definido como antisimétrico.
- Si dos líneas de una matriz coinciden, el determinante de la misma es cero.
Esto es debido a que el determinante se ha definido como alternado.
- Si una de las líneas está formada por ceros, el determinante es cero.
- Si se multiplica una línea por un escalar λ el determinante queda multiplicado por λ .
- Si una línea es suma de dos o más sumandos, se puede descomponer el determinante en suma de dos o más determinantes.

Esto es debido a que el determinante es una forma multilineal.

- Si una línea es combinación lineal de las restantes, el determinante es cero.
- Al sustituir una línea A_i por $A_i + \lambda A_j$ donde $i \neq j$, el determinante no cambia.

Demostración del último punto:

Sea el determinante $\det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n)$.

El determinante $\det(A_1, \dots, A_i + \lambda A_j, \dots, A_j, \dots, A_n)$ puede descomponerse en dos determinantes, por ser forma multilineal:

$$\begin{aligned} \det(A_1, \dots, A_i + \lambda A_j, \dots, A_j, \dots, A_n) &= \\ &= \det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n) + \det(A_1, \dots, \lambda A_j, \dots, A_j, \dots, A_n) \end{aligned}$$

El segundo determinante tiene una línea multiplicada por un escalar, luego:

$$\det(A_1, \dots, \lambda A_j, \dots, A_j, \dots, A_n) = \lambda \det(A_1, \dots, A_j, \dots, A_j, \dots, A_n)$$

$$\begin{aligned} \det(A_1, \dots, A_i + \lambda A_j, \dots, A_j, \dots, A_n) &= \\ &= \det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n) + \lambda \det(A_1, \dots, A_j, \dots, A_j, \dots, A_n) \end{aligned}$$

El último determinante es cero, pues tiene dos líneas iguales. Así, queda demostrado que:

$$\det(A_1, \dots, A_i + \lambda A_j, \dots, A_j, \dots, A_n) = \det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n)$$

Ejercicio: Calcular el siguiente determinante, aplicando las propiedades anteriores:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

5. MENOR COMPLEMENTARIO. ADJUNTO DE UN ELEMENTO

Se llama **menor complementario** de un elemento a_{ij} al determinante de la matriz obtenida eliminando la fila i y la columna j .

Se llama **adjunto** de un elemento a su menor complementario, multiplicado por $(-1)^{i+j}$, y se representa por:

$$A_{ij} \text{ es adjunto de } a_{ij}$$

Un determinante puede descomponerse en la suma de los adjuntos de los elementos de una fila o columna, multiplicados por los propios elementos:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1k} A_{1k} + a_{2k} A_{2k} + \dots + a_{nk} A_{nk}$$

• *Ejemplo:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Los **signos** dependen del coeficiente $(-1)^{i+j}$, y en la práctica, siguen la disposición:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & \dots & \\ \dots & \dots & & \end{vmatrix}$$

Al multiplicar los elementos de una línea por los adjuntos de otra, el resultado siempre es cero:

Dado el determinante $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nr} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$

$a_{1k} A_{1r} + a_{2k} A_{2r} + \dots + a_{nk} A_{nr}$ sería equivalente al determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Al multiplicar una matriz por la adjunta de su traspuesta, se obtiene:

$$A \cdot \text{Adj} (A)^t = |A| \cdot \text{In}$$

$$A \cdot \text{Adj} (A)^t = |A|$$

Donde In es la matriz identidad.

(el desarrollo está en la página siguiente)

$$\begin{matrix}
 \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nr} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} & \cdot & \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & & \dots \\ A_{1k} & \dots & A_{nk} \\ \dots & & \dots \\ A_{1r} & \dots & A_{nr} \\ \dots & & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix} \\
 A & & \text{Adj}(A)^t & & |A| \cdot \text{In}
 \end{matrix}$$

Por lo tanto, operando en la expresión anterior:

$$A \cdot \text{Adj}(A)^t = |A| \cdot \text{In}$$

$$A \cdot \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A)^t = \text{In}$$

Como $A \cdot A^{-1} = \text{In}$, queda que:

$$\frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A)^t = A^{-1}$$

Con la que se puede calcular la **inversa** de una matriz. Queda claro que para que una matriz admita inversa, su determinante ha de ser distinto de cero.

Otra forma de calcular la inversa de una matriz es mediante una matriz formada por la primera junto con la identidad. Si realizando cambios se consigue desplazar la matriz identidad de un lado al otro, el resultado será la matriz inversa.

Partiendo de $(A \mid \text{In})$, se trata de llegar a $(\text{In} \mid A^{-1})$.

Propiedad: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

Teorema: Una matriz A de tamaño $n \times n$ tiene inversa si, y sólo si, $|A| \neq 0$.

Demostración:

- Implicación \Leftarrow

Es cierto, porque se puede calcular $A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)^t}{|A|}$

- Implicación \Rightarrow

Partiendo de que $\exists A^{-1} / A \cdot A^{-1} = \text{In}$

Aplicando la propiedad anterior: $|A| \cdot |A^{-1}| = |\text{In}| = 1 \rightarrow |A| \neq 0$ y $|A^{-1}| \neq 0$

En las matrices de cambio de base siempre es posible calcular su inversa. El determinante siempre es distinto de cero, porque los vectores que las forman son linealmente independientes.

6. REGLA DE LAPLACE

Dada una matriz A , definimos el **menor**, denotado como $M_{i_1 \dots i_r; j_1 \dots j_r}$, al determinante de la matriz obtenida a partir de A , eliminando las filas i que no pertenezcan a $\{i_1 \dots i_r\}$ y las columnas j que no pertenezcan a $\{j_1 \dots j_r\}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$M_{i_1 \dots i_r; j_1 \dots j_r}$$

$$i \notin \{i_1 \dots i_r\}$$

$$j \notin \{j_1 \dots j_r\}$$

- *Ejemplo:*

$$\text{Dada la matriz: } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_{1,4;1,2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

(el menor es siempre un número)

Se define el **adjunto** de dicho menor, y se representa por $A_{i_1 \dots i_r; j_1 \dots j_r}$ como el producto de $(-1)^{i_1 + \dots + i_r + j_1 + \dots + j_r}$ por el determinante de la matriz obtenida eliminando las filas $\{i_1 \dots i_r\}$ y las columnas $\{j_1 \dots j_r\}$ (las que no se eliminaron con el menor).

- *Ejemplo anterior:*

$$A_{1,4;1,2} = (-1)^{1+4+1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

(el adjunto es siempre un número)

Regla de Laplace

Si fijamos una serie de líneas $\{j_1 \dots j_r\}$:

$$\sum_{i_1 \dots i_n} M_{i_1 \dots i_r; j_1 \dots j_r} \cdot A_{i_1 \dots i_r; j_1 \dots j_r} = |A|$$

- *Ejemplo:* (matriz anterior)

Fijando la primera y segunda columna:

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Las distintas permutaciones o posibilidades de combinación de las filas son:

$$\begin{matrix} 1,2 & 1,3 & 1,4 & 2,3 & 2,4 & 3,4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{matrix}$$

Calculando los adjuntos (para los menores distintos de cero):

$$(-1)^{1+2+1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

$$(-1)^{1+2+1+4} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

$$(-1)^{1+2+2+4} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

Se obtiene el determinante multiplicando los menores por los adjuntos:

$$|A| = 2 \cdot (-5) + 1 \cdot 5 + (-1) \cdot 3 = -10 + 5 - 3 = -8$$

Ejercicio: Calcular el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -4 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$